$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$ (1) $f: R\to R$

$y=0$ $f(x)=f(f(x))+xf(0)$ (2) $x=0 \to$ (2) $f(0)=f(f(0))$

$x=0 \to$ (1) $f(yf(0))=f(0) \Rightarrow$ თუ $f(0)\neq 0$ და $f(0)=c$ მაშინ $\forall x$ $f(x)=c$

$f(x+yf(x))=c=c+xc$ -ს რაც არ არის სწორი ყველა x სთვის

ანუ $f(0)=0$

(2) $\Rightarrow f(x)=f(f(x))$

$x=y \to$ (1)

$f(f(x)(x+1))=f(x)(x+1)$ (3)

$x=f(x)$ $y=x \to$ (1)

$f(f(x)(x+1))=f(x)(f(x)+1)=f(x)(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=0$ ან $f(x)=x$. $\forall x_1\neq$ თვის $f(x_1)=0$ მაშინ ფუნქციის

~~ყველა~~ მნიშვნელობა იქნება ყოველთვის 0.

~~x≠0~~ ავიღოთ x_1 ანუ $x=x_1\to$ (1)

$f(x_1+y\cdot 0)=0+x_1\cdot f(y) \Rightarrow$ $x_1\cdot f(y)=0$ $x_1\neq 0 \Rightarrow f(y)=0$.

ანუ პასუხი არის $f(x)=0$ და ფუნქცია $f(x)=x$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

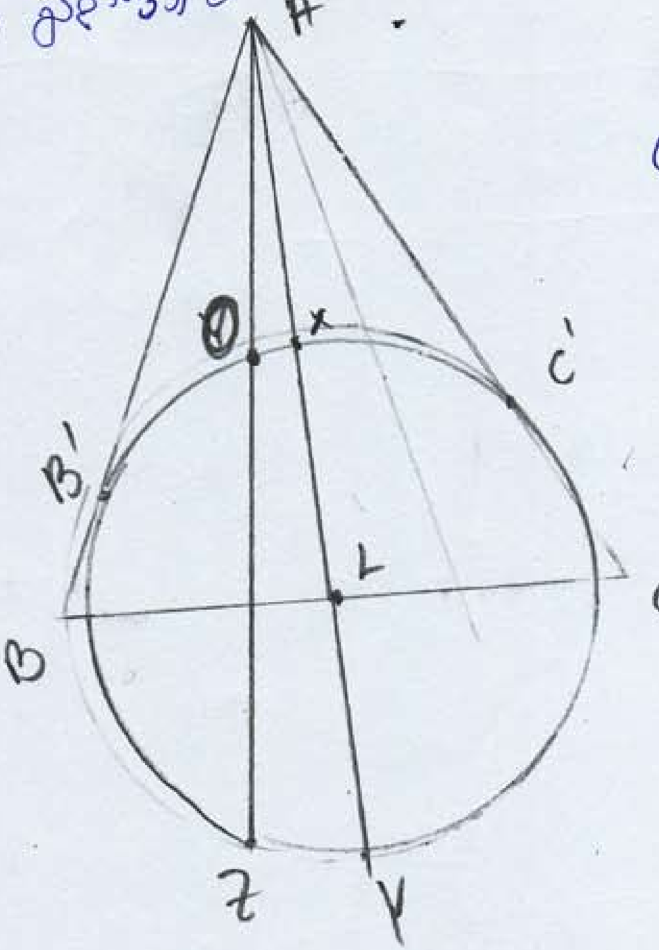
მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 156

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

თუ დავამტკიცებთ რომ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი [illegible] ორჯერ ჩ. წრეწირის რადიუსზე მაშინ ამოცანა რომ [illegible]. რადგან შემოხაზულის ცენტრი მდებარეობს ჩ. ~~[illegible]~~ წრეწირზე და თუ რადიუსი ორჯერ იქნება მაშინ ამოცანა რომ ~~წრეწირის~~ შემოხაზული წრეწირის ცენტრი იქნება [illegible] ჩ. წრეწირში საიდანაც ვასკვნით რომ სადაც [illegible] მდებარეობს [illegible].



$$AX\cdot(AX+AY)=AO(AO+OZ)$$

$OZ < XY \quad AX < AO$

~~AX+A~~

$AO+OZ < AX+AY$

საიდან გამოვა რომ

$XY > AO$ საიდანაც

გამოდის რომ $2r > R$

r - ჩ. წრეწირის რადიუსი

R - შემოხაზულის.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 156

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

დავაფიქსიროთ a და ვცვალოთ ჯამი b და c, ზ.ზ.დ. $c>b$.

$b=\frac{1-a}{2}-k \quad c=\frac{1-a}{2}+k$ სადაც $0\le k\le\frac{1-a}{2}$

$\frac{1-a}{2}\equiv f \quad b=f-k \quad c=f+k.$

$\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}$-ის მინიმუმს ვეძებთ.

$$\frac{1}{(f-k)^2-2(f-k)+5}+\frac{1}{(f+k)^2-2(f+k)+5}=\frac{1}{f^2+k^2-2fk-2f+2k+5}+$$
$$+\frac{1}{f^2+k^2+2fk-2f-2k+5}=\frac{1}{f^2-2f+5+k^2+2k(1-f)}+\frac{1}{f^2-2f+5+k^2-2k(1-f)}$$

მინიმუმი იქნება მაშინ როცა $k=0$ რადგან მნიშვნელში k^2-ით იზრდება

ანუ $b=c=f \quad a=1-2f \quad f\le\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{(1-2f)^2-2(1-2f)+5}+\frac{2}{f^2-2f+5}=\frac{1}{4(f^2+1)}+\frac{2}{f^2-2f+5}$$

ამის მინიმუმი მიიღება $f=\frac{1}{2}$ როცა სადაც $\frac{1}{4(f^2+1)}$-ის მინიმუმი ძალიან ... იზრდება ანუ $a,b,c=(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

$$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$